УДК 517.946

И. И. Скрыпник

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучаются локальные граничные свойства решений дивергентных слабо нелинейных эллиптических уравнений второго порядка. Установлены условия существования почти всюду некасательных пределов и условия существования L_2-пределов на части границы области.

В данной работе развивается метод, примененный в работах [1] и [4] где изучается локальное поведение решений уравнения Лапласа и общего линейного эллиптического уравнения вблизи границы. Близкими вопросами занимались В. П. Михайлов, А. К. Гушин, И. М. Петрушко, М. Л. Горбачук, Я. А. Ройтберг. Ссылки на работы перечисленных авторов имеются в [4].

Будем рассматривать обобщенные решения $u(z)\in W^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ эллиптического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z_j}\left(a_{ij}(z,u)\frac{\partial u}{\partial z_i}\right)=a\left(z,u,\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1}$$

в ограниченной области $\Omega\subset R_+^{n+1}$.

Локальное поведение решения уравнения (1) будем рассматривать вблизи части S, являющейся плоским куском, $S\subset R^n$, $\mathrm{mes}\,S>0$ границы $\partial\Omega$, что всегда можно обеспечить введением локальных координат при соответствующей гладкости границы $\partial\Omega$:

$$R_+^{n+1}=\{z=(x,y): x\in R^n,\ y>0\}.$$

Относительно коэффициентов $a_{ij}\,(z,\,u)$, $a\,(z,\,u,\,p)$ предполагаем, что при $z\in\Omega$, произвольных u, p, функция $a\,(z,u,p)$ измерима, $a_{ij}\,(z,\,u)$ дифференцируемы по z, u, и выполняются неравенства

$$\nu_0|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n+1}a_{ij}(z,u)\,\xi_i\xi_j\leqslant\nu_0^{-1}|\xi|^2 \tag{2}$$

для любых $z\in\Omega$, $\xi\in\Omega$, $0<\nu_0=\mathrm{const}<\infty$, $u\in R^1$, $p\in R^{n+1}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n+1}\left\{\left|\frac{\partial a_{ij}(z,u)}{\partial u}\right|+\sum_{r=1}^{n+1}\left|\frac{\partial a_{ij}(z,u)}{\partial z_r}\right|\right\}\leqslant\nu, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left|\frac{\partial a(z,u,p)}{\partial p_i}\right|(1+|p|)+\sum_{i=1}^{n+1}\left|\frac{\partial a(z,u,p)}{\partial z_i}\right|+\left|\frac{\partial a(z,u,p)}{\partial u}\right|\leqslant\nu_0(1+|p|),$$

$$|a(z,u,p)|\leqslant f(z)+\nu_0|p|;$$

условия на $f(z)$ будут сформулированы позже.

© И. И. Скрыпник, 1991

Решение $u(z)$ уравнения (1) понимается в смысле интегрального тождества

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \int_{\Omega} a_{ij}(z,u) \frac{\partial u}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} dz + \int_{\Omega} a\left(z, u, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \varphi dz = 0 \tag{4}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Для произвольного множества $W \subset \Omega$, $a > 0$ обозначим

$$\Gamma_a(x) = \{(s, y) : |x - s| < ay\}, \qquad x \in S; \tag{5}$$

$$N_{W,a}(x) = \sup\{|u(z)|,\ z \in \Gamma_a(x) \cap W\};$$

$$y_s = \sup\{y : (s, y) \in W\};$$

$$N^0_{W,a}(x) = \sup\{|u(s, y) - u(s, y_s)|,\ (s, y) \in \Gamma_a(x) \cap W\}; \tag{6}$$

$$A_{W,a}(x) = \left\{ \int_{\Gamma_a(x) \cap W} y^{1-n} |\nabla u(s, y)|^2 \, ds dy \right\}^{1/2}; \tag{7}$$

$$D_{W,a}(x) = \sup\left\{ y \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|,\quad z \in \Gamma_a(x) \cap W \right\}; \tag{8}$$

$$F_{W,a}(x) = \sup\{y \cdot |f(z)|,\ z \in \Gamma_a(x) \cap W\}. \tag{9}$$

Пусть $\Omega_h = \{z \in \Omega : y > h\}$,

$$\Omega^h = \{z \in \Omega : 0 < y < h\},$$

$$\Omega^{h_2}_{h_1} = \{z \in \Omega : h_1 < y < h_2\}.$$

Прежде чем формулировать основные результаты, введем определение нетангенциальной ограниченности.

Определение. Говорим, что функция $g(z)$, определенная в Ω, нетангенциально ограничена в точке $x_0 \in S$, если для некоторых a, $b > 0$

$$\sup |g(z)| < \infty, \quad z \in \Gamma^b_a(x_0).$$

Здесь $\Gamma^b_a(x_0) = \{(s, y) \in \Omega : |s - x_0| < ay,\ 0 < y < b\}$.

Теорема 1. Пусть $u(z)$ — решение уравнения (1) в Ω. Справедливы следующие утверждения:

1. Если функции $u(z)$, $y \cdot f(z)$ нетангенциально ограничены вблизи $S_1 \subset S$, тогда для достаточно малого h и любого $a > 0$ функция $A_{\Omega^h,a}(x) < \infty$ почти всюду на S_1.

2. Если при некоторых a, $h > 0$ функция $A_{\Omega^h,a}(x) < \infty$ для любых $x \in S_1$ и $yf(z)$ нетангенциально ограничена вблизи S_1, тогда решение $u(z)$ имеет почти в каждой точке $x_0 \in S_1$ конечный некасательный предел

$$\lim u(z) < \infty, \text{ когда } z = (x, y) \to (x_0, 0),\ z \in \Gamma_a(x_0). \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть при некоторых $H > 0$, $a > a_0$, $h \in (0, H)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega^H} y |\nabla u|^2 dz + \int_{S_1} F^2_{\Omega^H,a}(x) dx + \int_{S_1} N^2_{\Omega^H_h,a}(x) dx < \infty. \tag{11}$$

Тогда почти всюду на S_1 существует предел

$$\lim u(z),\ z \to (x, 0),\ z \in \Gamma_a(x), \tag{12}$$

являющийся функцией $u^+(x) \in L_2(S_1)$.

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность чисел $k = 1, 2, \dots;\ 0 < \varepsilon_k < h$, такая, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, тогда

$$\sup_k \|u(x, \varepsilon_k)\|_{L_2(S_1)} < \infty, \tag{13}$$

$$\|u(x, \varepsilon_k) - u^+(x)\|_{L_2(S_1)} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{14}$$

Доказательство теорем 1, 2 основывается на следующих двух теоремах, которые доказываются методами работ [1, 4].

Пусть G — ограниченное подмножество S_1, обозначим

$$\mathcal{P} = \operatorname{int}\left\{\Omega \setminus \bigcup_{x \in G} \Gamma_a(x)\right\}.$$

Теорема 3. Пусть $u(z)$ решение уравнения (1) в Ω, $\alpha, \beta \in (1, \infty)$, $\rho > 0$. Существует $a_0 = a_0(n, \nu_0, \alpha)$ такое, что для любых $a > a_0$ можно указать положительные числа

$$\gamma = \gamma(n, \nu_0, \alpha, \beta, a), \quad \delta = \delta(n, \nu_0, \alpha, \beta, a), \quad r = r(n, \nu_0, \alpha, \beta, a, \rho),$$

при которых выполняется неравенство

$$\alpha \cdot \operatorname{mes}\{N^0_{\mathcal{P}} > \beta\lambda\} \leqslant \operatorname{mes}\{N^0_{\mathcal{P}} > \lambda\} +$$
$$+ \alpha\left[c(n)\operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P}} > \gamma\lambda\} + \operatorname{mes}\{D_{\mathcal{P}} > \delta\lambda\} + \operatorname{mes}\{F_{\mathcal{P}} > \rho\lambda\}\right] \tag{15}$$

для всех $\lambda > 0$, лишь только $\operatorname{diam} G < r$.

Теорема 4. Пусть $u(z)$ — решение уравнения (1) в Ω. Если $\alpha, \beta \in (1, \infty)$, $\rho, r_0, a > 0$, то найдутся такие положительные числа $\gamma = \gamma(n, \nu_0, \alpha, \beta, a, \rho, r_0)$, $\delta = \delta(n, \nu_0, \alpha, \beta, a, \rho, r_0)$, что верно неравенство

$$\alpha \operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P}} > \beta\lambda\} \leqslant \operatorname{mes}\{A_{\mathcal{P}} > \lambda\} + \alpha\left[\operatorname{mes}\{N_{\mathcal{P}} > \gamma\lambda\} +\right.$$
$$\left. + \operatorname{mes}\{D_{\mathcal{P}} > \delta\lambda\} + \operatorname{mes}\{E_{\mathcal{P}} > \rho\lambda\}\right]. \tag{16}$$

Для всех $\lambda > 0$, лишь только $\operatorname{diam} G < r_0$.

Остановимся на основных моментах доказательства теоремы 4.

Лемма. Пусть $u(z)$ — решение уравнения (1) в Ω, $h \in (0, H]$, $a_1 > a > 0$, $l \in (0, 1)$. Если области $W \subset W_1 \subset \Omega^h$ таковы, что при $x \in S_1$ $z_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma_a(x) \cap W$ замкнутый шар $\bar{B} = \bar{B}(z_0, ly_0)$ лежит в $\Gamma_{a_1}(x) \cap W_1$, то существует такое $c_0 = c_0(n, \nu_0, l, H)$, что выполнены неравенства

$$D_{W,a}(x) \leqslant c_0\{A_{W_1, a_1}(x) + F_{W_1, a_1}(x)\}, \tag{17}$$

$$D_{W,a}(x) \leqslant c_0\{N_{W_1, a_1}(x) + F_{W_1, a_1}(x)\}. \tag{18}$$

Доказательство. Покажем, что если $r \in (0, H]$ и замкнутый шар $\bar{B} = \bar{B}(z_0, r)$ лежит в Ω, то существует такое $c_1 = c_1(n, \nu_0, H)$, что

$$r|\nabla u(z_0)| \leqslant c_1\left[\left\{\int_B r^{1-n}|\nabla u(z)|^2\, dz\right\}^{1/2} + r\sup\{|f(z)|,\ z \in B\}\right], \tag{19}$$

$$r|\nabla u(z_0)| \leqslant c_1[\sup\{|u(z)|,\ z \in B\} + \sup\{r|f(z)|,\ z \in B\}]. \tag{20}$$

Подставим в интегральное тождество (4) $\Psi(z) = \dfrac{\partial}{\partial z_t}\{\psi(z)\zeta^s\}$, $\psi(z) \in W^2_2(\Omega)$; $\zeta(z)$ — срезающая гладкая для шара

$$B_1 = B\left(z_0, \frac{r}{2}\right),\ \zeta(z) = 1 \text{ в } B\left(z_0, \frac{r}{4}\right),\ |\nabla\zeta| \leqslant \frac{c}{r};$$

$$t = 1, \ldots, n+1;\ k, s > 0 \text{ будут выбраны позже.}$$

При наших предположениях (2), (3) $u(z) \in W^2_2(\Omega')$ для любой $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ (см. [3, с. 315]).

В первом члене проинтегрируем по частям. Проверяется, что можно взять $\Psi(z) = |\nabla u|^k \dfrac{\partial u}{\partial z_t}$. Далее применяя (2), (3), получаем

$$\int_{B_1} |\nabla u|^k \sum_{i,j=1}^{n+1} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j}\right|^2 \zeta^s dz \leqslant c_2 \cdot (k+s)^2 \left[\int_{B_1} |\nabla u|^{k+4} \zeta^s dz +\right.$$

$$+\frac{1}{r^2}\int_{B_1}|\nabla u|^{k+2}\zeta^{s-2}dz+\int_{B_1}|f|^{k+2}\zeta^{s-2}dz\Big].\qquad(21)$$

Далее воспользуемся неравенством

$$\int_{B_1}|\nabla u|^{k+4}\zeta^s dz\leqslant c_3\Big[\operatorname{osc}^2\{u,\,b_1\}\int_{B_1}|\nabla u|^k\sum_{i,j=1}^{n+1}\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\partial z_j}\Big|^2\zeta^s dz+$$
$$+\int_{B_1}|\nabla u|^{k+2}\zeta^{s-2}|\nabla\zeta|^2dz\Big],$$

которое имеется в [3, с. 86].

Окончательно получаем, предполагая, что $\sup\{|f|^{k+2},\, z\in B\}<\infty$,

$$\int_{B_1}|\nabla u|^k\sum_{i,j=1}^{n+1}\Big|\frac{\partial^2u}{\partial z_i\partial z_j}\Big|^2\zeta^s dz\leqslant$$
$$\leqslant c_4(k+s)^2\Big[\frac{1}{r^2}\int_{B_1}|\nabla u|^{k+2}\zeta^{s-2}dz+r^{n+1}\sup\{|f|^{k+2},\,z\in B_1\}\Big].\qquad(22)$$

Используя теорему вложения $\overset{0}{W}{}^1_2(B_1)$ в $L_{2\frac{n+1}{n-1}}(B_1)$ и неравенство (22), имеем

$$\int_{B_1}|\nabla u|^k\zeta^s dz+r^{n+1}\sup\{|f|^k,\,z\in B_1\}\leqslant$$
$$\leqslant c_5(k+s)^{2\frac{n+1}{n-1}}\Big[\Big\{\int_{B_1}\frac{\partial}{\partial z}\big(|\nabla u|^{k\cdot\frac{n-1}{2(n+1)}}\zeta^{s\cdot\frac{n-1}{2(n+1)}}\big)dz\Big\}^{\frac{n+1}{n-1}}+$$
$$+r^{n+1}\sup\{|f|^k,\,z\in B_1\}\Big]\leqslant c_6(k+s)^{2\cdot\frac{n+1}{n-1}}\Big[r^{n+1}\sup\{|f|^k,\,z\in B_1\}+$$
$$+\Big\{\int_{B_1}|\nabla u|^{k\frac{n-1}{n+1}}\zeta^{s\frac{n-1}{n+1}-2}dz+r^{n+1}\sup\{|f|^{k\frac{n-1}{n+1}},\,z\in B_1\}\Big\}^{\frac{n+1}{n-1}}\Big]\leqslant\qquad(23)$$
$$\leqslant c_7(k+s)^{2\cdot\frac{n+1}{n-1}}\Big[\int_{B_1}|\nabla u|^{k\cdot\frac{n-1}{n+1}}\zeta^{s\cdot\frac{n-1}{n+1}-2}dz+r^{n-1}\sup\{|f|^{k\cdot\frac{n-1}{n+1}},\,z\in B_1\}^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Выбрав $k=k_i=2\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^i$, $s=s_i=2\left(\frac{n+1}{n-1}\right)-n-1$, разделив левую и правую части (23) на r^{n+1}, получим

$$\frac{1}{r^{n+1}}\int_{B_1}|\nabla u|^{k_i}\zeta^{s_i}dz+\sup\{|f|^{k_i},\,z\in B_1\}\leqslant$$
$$\leqslant c_8\cdot b^i\Big[\frac{1}{r^{n+1}}\int_{B_1}|\nabla u|^{k_{i-1}}\zeta^{s_{i-1}}dz+\sup\{|f|^{k_{i-1}},\,z\in B_1\}\Big]^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Обозначая $\mathcal{J}_i=\frac{1}{r^{n+1}}\int_{B_1}|\nabla u|^{k_i}\zeta^{s_i}dz+\sup\{|f|^{k_i},\,z\in B_1\}$, имеем $\mathcal{J}_i\leqslant c_8b^i\mathcal{J}_{i-1}^{\tau^{-1}}$, где $\tau=\frac{n-1}{n+1}$, $b=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2\cdot\frac{n+1}{n-1}}$. Дальнейшее применение этого неравенства дает

$$\mathcal{J}_i^{\tau^i}\leqslant c_8^{\tau^i+\tau^{i-1}+\ldots+\tau}b^{i\tau^i+(i-1)\tau^{i-1}+\ldots+\tau}\mathcal{J}_0,$$

отсюда при $i\to\infty$ получаем требуемую оценку (19).

Неравенство (20) получаем из (19), если в интегральное тождество подставить $\varphi(z) = u(z) \cdot \zeta(z)$, где $\xi(z)$ срезающая гладкая функция для шара $B = B(z_0, r)$, $\zeta(z) = 1$ в $B(z_0, r)$, $|\nabla\zeta| \leqslant \frac{c}{r}$.

Возьмем $z_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma_a(x) \cap W$, $r = ly_0$, если $(s, y) \in B(z_0, ly_0)$, то $|y - y_0| < ly_0$, $|s - s_0| < ly_0$. Отсюда

$$y = y - y_0 + y_0 \leqslant \frac{1+l}{l} r,$$

$$y \geqslant y_0 - |y - y_0| \geqslant \frac{1-l}{l} r.$$

Теперь неравенства (17), (18) следуют из (19), (20).

Следствие из теоремы 4 и леммы. Пусть H, $a > 0$; тогда существует такое число $c = c(n, \nu_0, a, H)$, что при $h \in (0, H)$, $\operatorname{diam} G < ah$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{A_{\mathscr{P},a} > \lambda\} \leqslant c\,[\operatorname{mes}\{cN_{\Omega^h,2a} > \lambda, G\} + \operatorname{mes}\{cF_{\Omega^h,2a} > \lambda, G\}] \tag{24}$$

для всех $\lambda > 0$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{mes}\{A_{\mathscr{P},a} > \lambda\} \leqslant 2\operatorname{mes}\{A_{\mathscr{P},a} > 2\lambda\}.$$

Доказательство теоремы 4. Пусть, как и ранее, $\mathscr{P} = \operatorname{int}\left\{\Omega \setminus \bigcup_{x \not\in G} \Gamma_a(x)\right\}$, G — открытое ограниченное, $G \subset S_1 \subset S$, $\mathscr{P}_\varepsilon = \{z \in \mathscr{P}, y > \varepsilon\}$. Докажем (16), заменив $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}_\varepsilon$, потом перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим требуемое неравенство.

Введем

$$E_\varepsilon = \{A_{\mathscr{P}_\varepsilon} > \beta\lambda,\ N_{\mathscr{P}_\varepsilon} \leqslant \gamma\lambda,\ D_{\mathscr{P}_\varepsilon} \leqslant \delta\lambda,\ F_{\mathscr{P}_\varepsilon} \leqslant \rho\lambda\},$$

$$G_0 = \{A_{\mathscr{P}_\varepsilon} > \lambda\}.$$

Докажем, что при достаточно малых γ, δ, $\operatorname{diam} G$ выполняется неравенство

$$\alpha \cdot \operatorname{mes} E_\varepsilon < \operatorname{mes} G_0. \tag{25}$$

Тогда (16) будет следовать из (25).

Проведем доказательство от противного. Пусть

$$\operatorname{mes} G_0 \leqslant \alpha \operatorname{mes} E_\varepsilon, \tag{26}$$

тогда существует шар $B \subset G_0$, такой что $\operatorname{mes} B \leqslant c_1\alpha \operatorname{mes}\{E_\varepsilon \cap B\}$ и существует точка $x_0 \in \partial B$, что $A_{\mathscr{P}_\varepsilon}(x_0) \leqslant \lambda$ (см. [1]).

Не ограничивая общности, считаем, что $B = B(0, r)$, выбирая $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, шар $B_0 = B(0, (1 - 2\xi) r)$, чтобы выполнялось $\operatorname{mes} B_0 = \left(1 - \frac{1}{2\alpha c_1}\right) \operatorname{mes} B_1$, тогда $\operatorname{mes} B \leqslant 2\alpha c_1 \operatorname{mes}\{E_\varepsilon \cap B_0\}$. Положим

$$E_0 = E_\varepsilon \cap B_0,$$

$$V^r = \{(s, y) : |s| < r - ay,\ 0 < y < a^{-1}r\},$$

$$V_\varepsilon^r = V^r \cap \Omega_{(\varepsilon)},$$

где $\Omega_{(\varepsilon)} = \{z \in \Omega;\ \operatorname{dist}\{z, \partial\Omega\} > \varepsilon\}$;

$$W = \bigcup_{x \in E_0} \{\Gamma_a(x) \cap V_\varepsilon^r\};$$

W ограничено снизу и сверху поверхностями ∂W^- и ∂W^+ Далее доказательство теоремы состоит из двух утверждений.

Утверждение 1. Если $\delta > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\delta^2 \varkappa_n a^n (n + \ln \xi^{-1}) < \frac{\beta^2 - 1}{2}, \tag{27}$$

тогда

$$\int_W y |\nabla u|^2 dz > \frac{1}{\alpha \varkappa_n a^n c_1} (\beta^2 - 1) \operatorname{mes} B\lambda^2. \tag{28}$$

Эти неравенства доказываются так же, как и в работах [1, 4].

Утверждение 2. Существует $c = c(\alpha, r_0, \nu_0)$, такое, что

$$\int_W y |\nabla u|^2 dz \leqslant c(\gamma\delta + \gamma^2 + \gamma\rho) \operatorname{mes} B\lambda^2. \tag{29}$$

Доказательство. Для оценки интеграла, стоящего слева в (29), достаточно оценить интеграл $\sum\limits_{i,j=1}^{n+1} \int\limits_W y a_{ij}(z, u) \frac{\partial u}{\partial z_i} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz$.

Интегрируя по частям и используя уравнение (1), (n — внешняя нормаль к ∂W), получаем

$$2 \sum_{i,j=1}^{n+1} \int_W y a_{ij}(z, u) \frac{\partial u}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial z_j} dz = 2 \sum_{i,j=1}^{n+1} \int_{\partial W} y a_{ij}(z, u) \frac{\partial u}{\partial z_i} u \cos(n, z_j)\, d\sigma -$$

$$- \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\partial W} a_{in+1}(z, u) u^2 \cos(n, z_i)\, d\sigma + \sum_{i=1}^{n+1} \int_W \frac{\partial a_{in+1}}{\partial z_i} u^2 dz +$$

$$+ 2 \int_W y a\left(z, u, \frac{\partial u}{\partial z}\right) u dz.$$

Из определения множеств E_0, W вытекает, что $|u| \leqslant \gamma\lambda$, $y|\nabla u| \leqslant \delta\lambda$, $y|f| \leqslant \rho\lambda$ в замыкании W.

Учитывая также, что

$$\operatorname{mes} W \leqslant \operatorname{mes} V^r = \frac{\operatorname{mes} B}{a(n+1)} r, \ \operatorname{mes} \partial W \leqslant \operatorname{mes} B \sqrt{1 + a^{-2}}; \ \max_W y \leqslant a^{-1} r,$$

получаем (29).

Для окончания доказательства теоремы 4 остается заметить, что при достаточно малых γ неравенства (28), (29) противоречат друг другу, и, следовательно, неравенство (26) невозможно.

1. *Burkholder D. L., Gundy R. F.* Distribution function inequalities for the area integral studia Math.—1972.— 44, N 6. — P. 527—544.
2. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.— С. 27, 246—254.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1978.— С. 86, 315.
4. *Шелепов В. Ю.* О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций // Мат. сб.— 1987.— 133.— С. 446—468.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 29.11.89